Elaborazione numerica dei segnali: analisi delle caratteristiche dei segnali ed operazioni su di essi

Outline

- Dall’analogico al digitale
- Quantizzazione dell’informazione
- Trasformate di Fourier
- Filtraggio digitale
- Conclusione

Dall’analogico al digitale

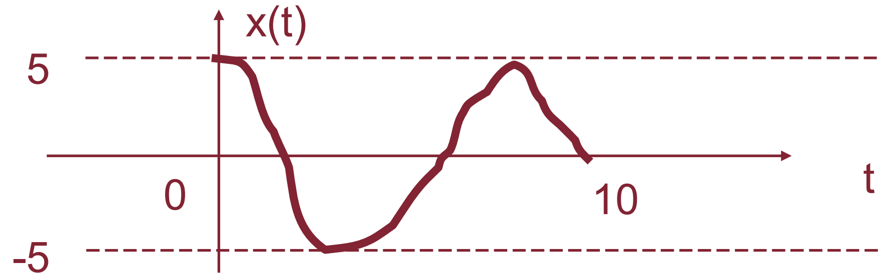
- Un segnale x(t) rappresenta la variazione temporale di una grandezza fisica (tensione, corrente, temperatura)
- Formalmente x(t) è una funzione

$$x(t) : T \rightarrow D$$

Dall'analogico al digitale

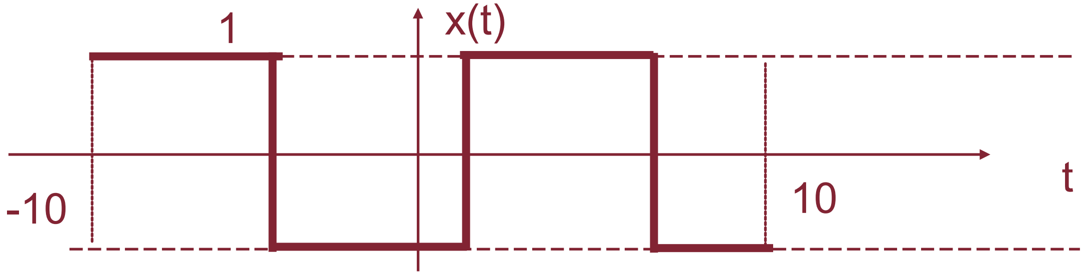
Analog signal (example)

$$D = [-5,5] \text{ e } T = [0,10]$$

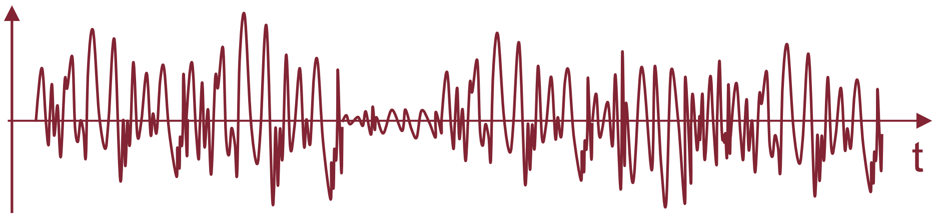


Digital signal (example)

$$D = \{-1,1\} \text{ e } T = [-10,10]$$



Dall'analogico al digitale



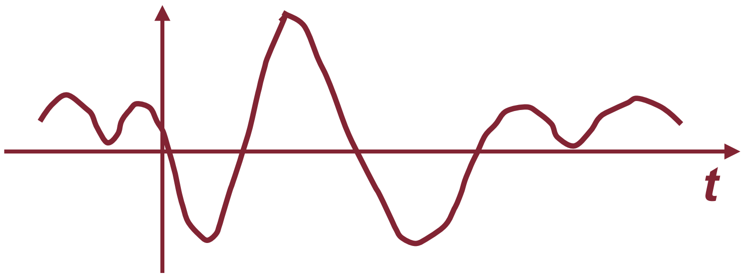
- Segnali *analogici*:
  - Audio (voce, musica)
  - Video (TV analogica)
- Segnali *numerici* (sequenze di digit):
  - Audio e video digitalizzati
  - Immagini Digitali
  - Sequenze di immagini (videoclip, TV digitale, …)
  - Dati (documenti word/excel, files, …)

Reti *analogiche*: Broadcast radio/TV, cellulare TACS, cordless analogico

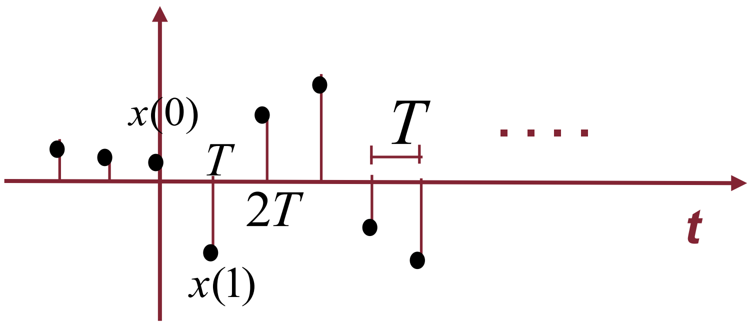
Tutte le altre reti sono *numeriche* (audio e video vengono *digitalizzati*)

Dall'analogico al digitale

Segnale analogico $x(t)$



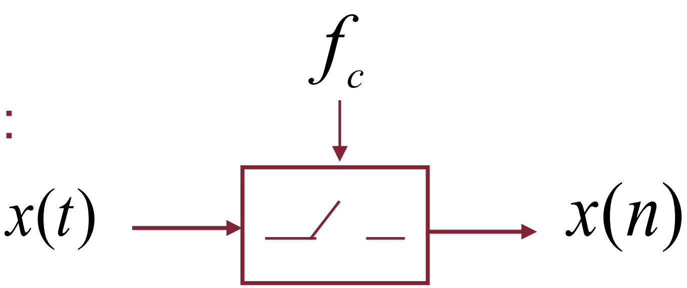
Sequenza dei suoi campioni: $x(n) = x(t)\big|_{t=nT}$



$T \equiv$ *intervallo di campionamento (sec)*

$f_c = \dfrac{1}{T}$ *frequenza di campionamento (Hz)*

Campionatore:



Trasmissione a distanza,
o immagazzinamento

Dall’analogico al digitale

Se $x(t)$ è *limitato in banda,* con banda $\pm W$ intorno alloriginale, e se $f_c \geq 2W$ (criterio di Nyquist), allora il segnale ricostruito $x_R(t)$ risulta uguale all’originale, ossia:

$$x_R(t) = x(t) \qquad per \quad f_c \geq 2W$$

Dall’analogico al digitale

Spiegazione intuitiva: se $x(t)$ varia lentamente, e se la si osserva abbastanza frequentemente, allora il suo andamento completo è perfettamente ricostruibile tramite *interpolazione* delle osservazioni

$$\{x(nT), n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$$

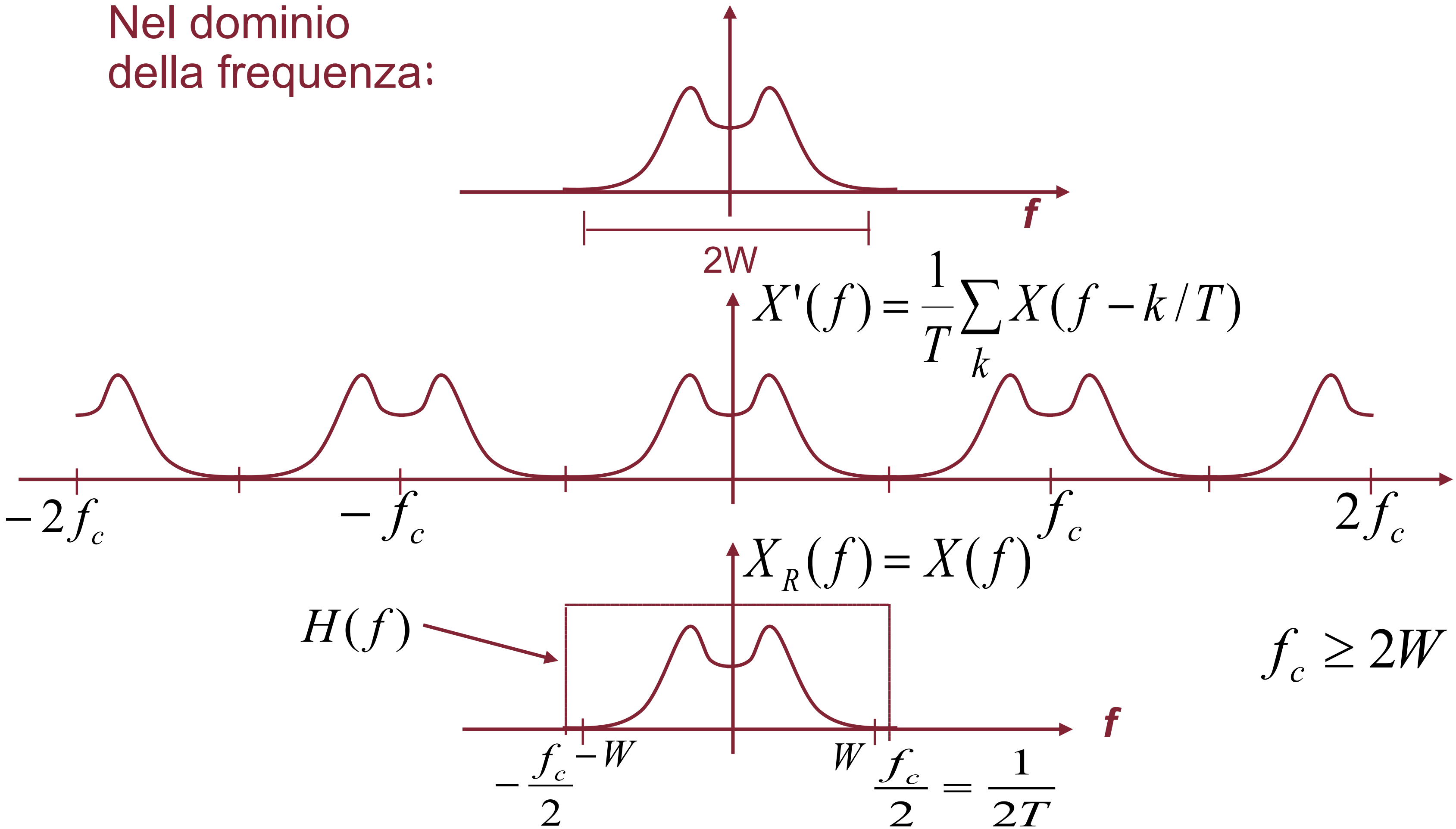
Dall'analogico al digitale

La proprietà fondamentale che sta alla base del teorema del campionamento è la seguente:

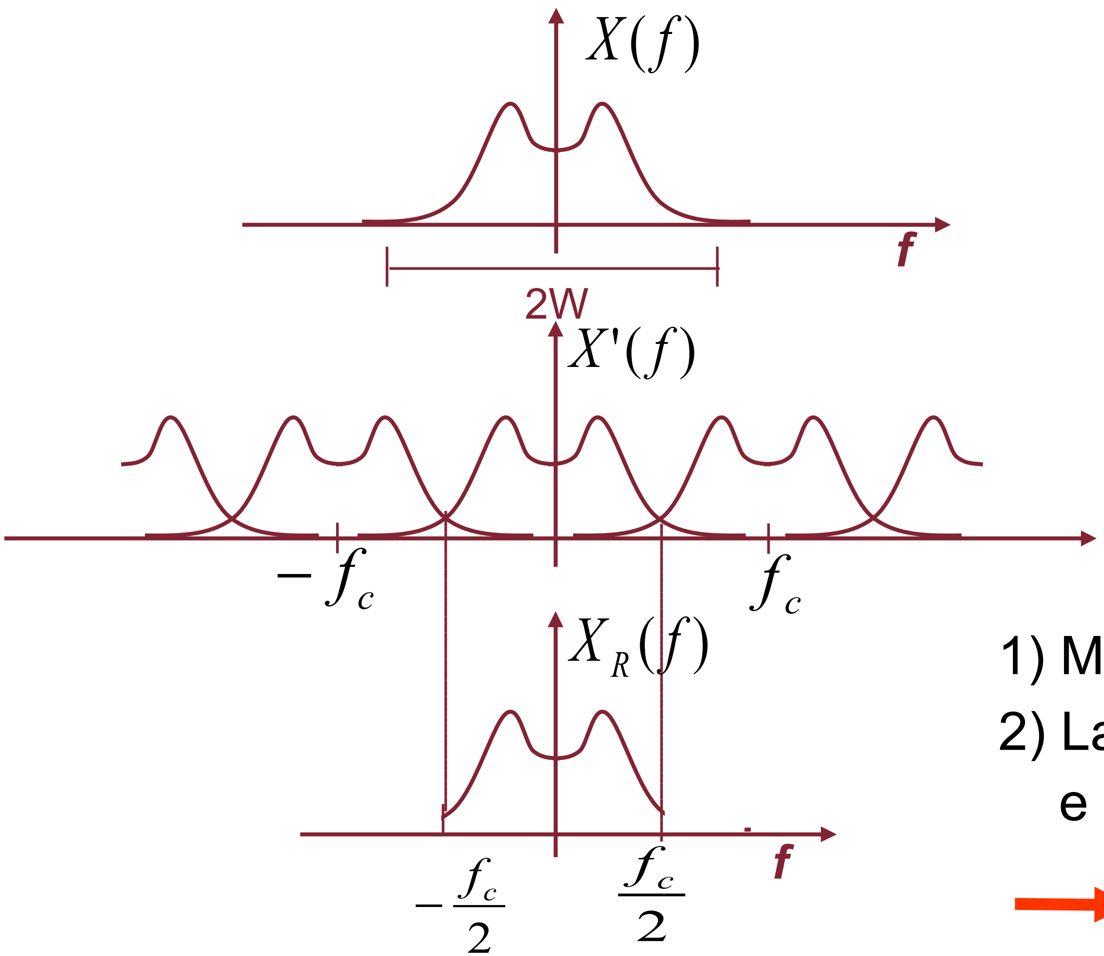
$$FT\left\{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-nT)\right\} = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f-\frac{n}{T}\right)$$

Dall'analogico al digitale

Nel dominio
della frequenza:



Dall'analogico al digitale



Sotto-campionamento:

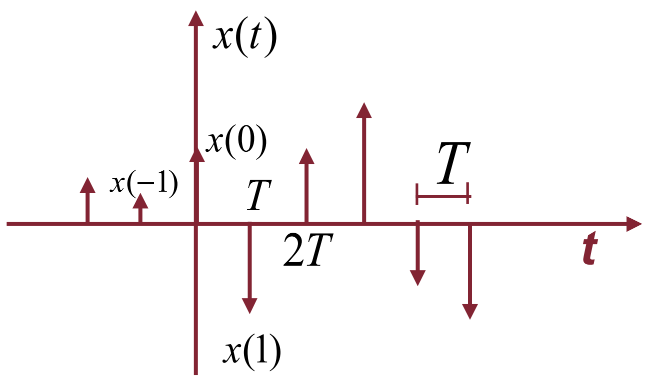
$$f_c < 2W$$

1) Manca una parte dello spettro
2) La parte mancante si "ripiega" e si somma al resto

→ c'è dell'*altro* ("alias") nello spettro ricostruito

Dall’analogico al digitale

Ricostruzione, con treno di impulsi matematici: $$x'(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT)\delta(t-nT)$$

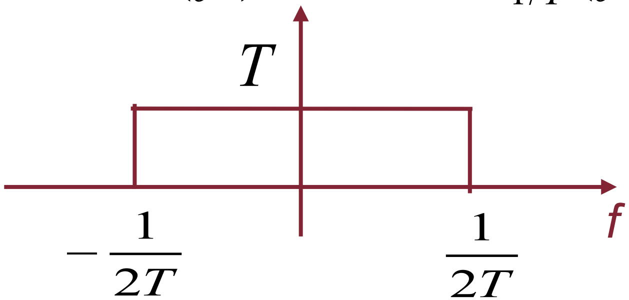


Dall'analogico al digitale

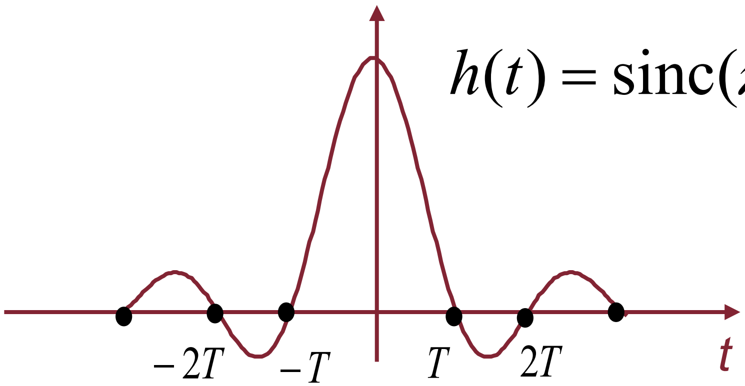
Ricostruzione *ideale*, con treno di impulsi matematici:

$$x'(t) = \sum_{n} x(n)\delta(t - nT)$$

$$H(f) = T\ rect_{1/T}(f)$$

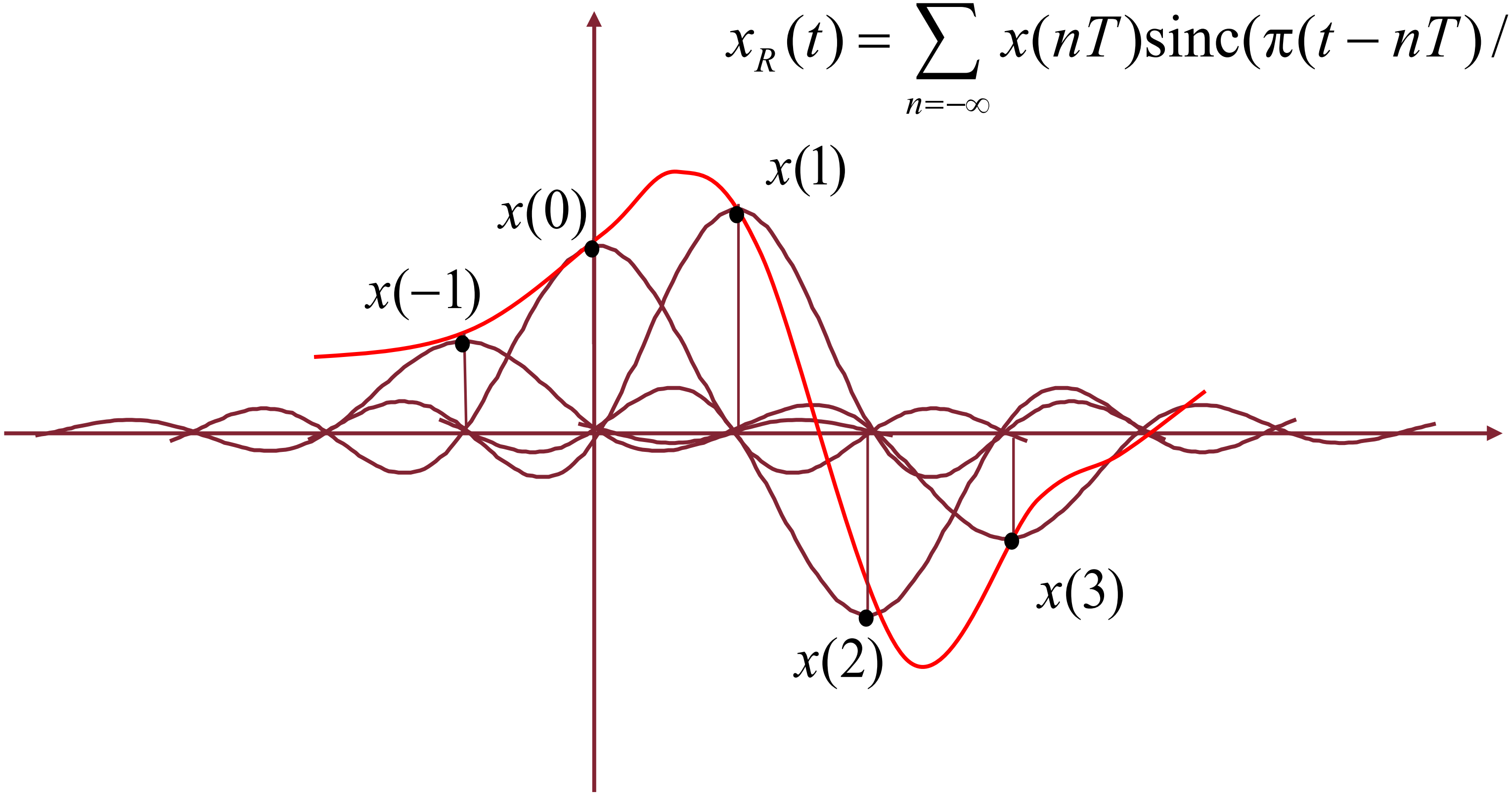


$$h(t) = \mathrm{sinc}(\pi t / T)$$

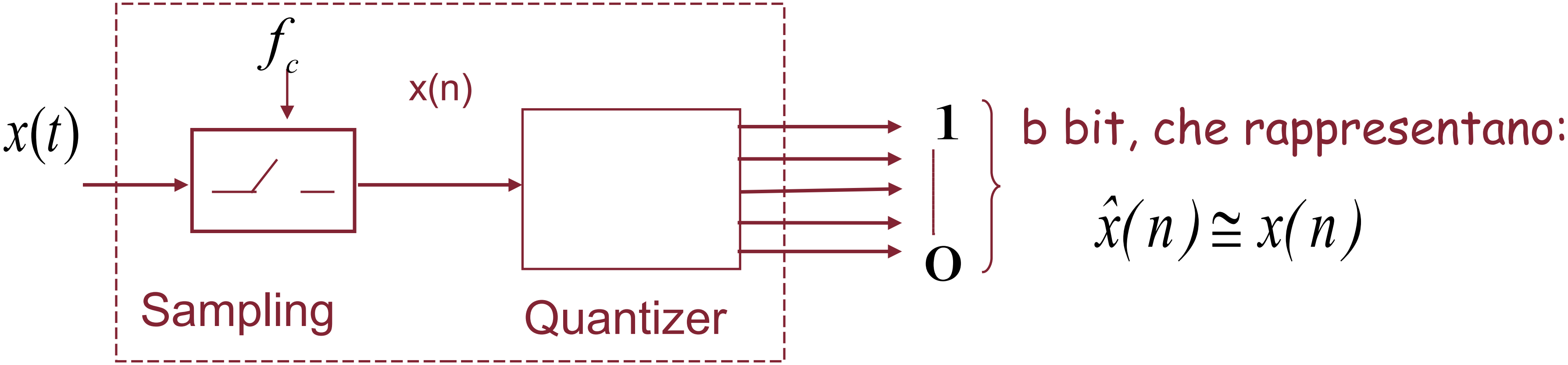


Dall’analogico al digitale

$$x_R(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT)\mathrm{sinc}(\pi(t-nT)/T)$$



Quantizzazione dell'informazione

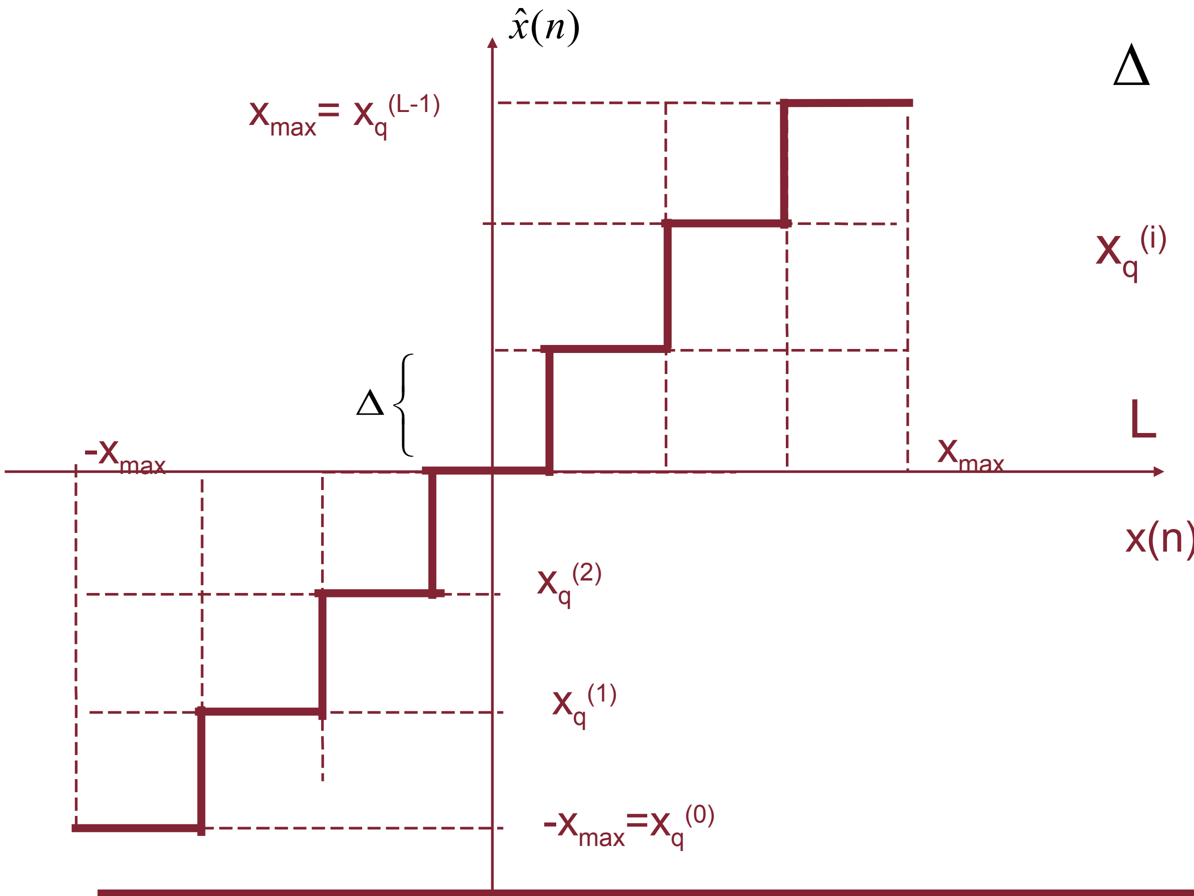


ADC: Analog-to-Digital Converter

$$\hat{x}(n) = x(n) + q(n) \cong x(n)$$

q(n): errore di quantizzazione, che svanisce all'aumentare di *b*, ovvero del numero di bit impiegati nella conversione A/D

Quantizzazione dell'informazione

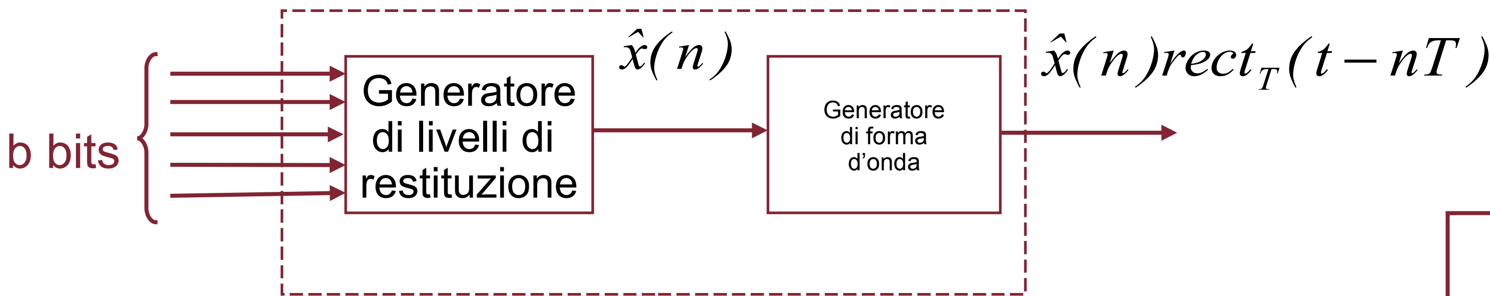


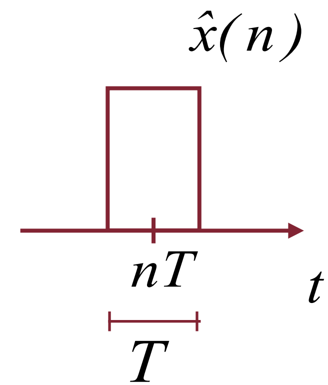
Δ Passo di quantizzazione

$x_q^{(i)}$ Livello di restituzione rappresentato con b bits

L Numero dei livelli di quantizzazione

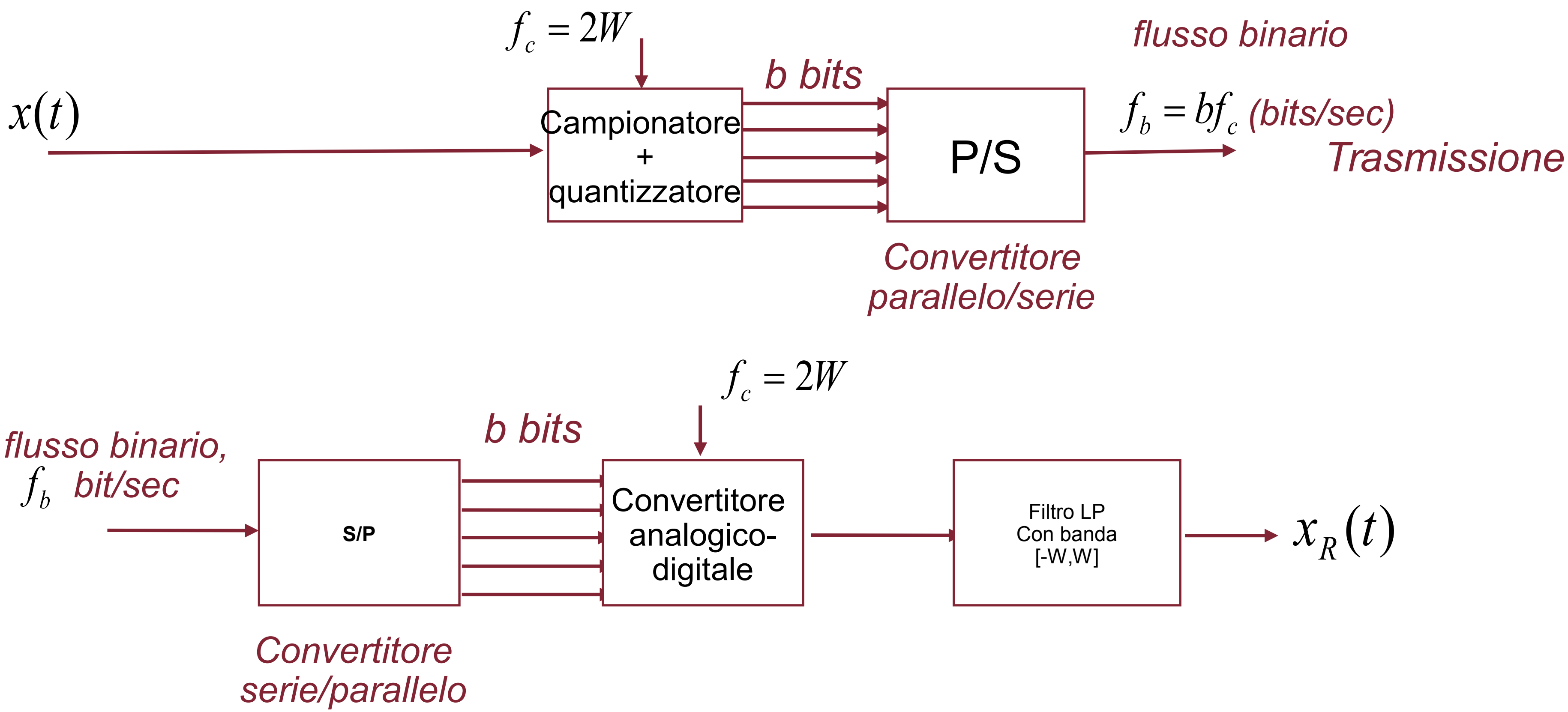
Quantizzazione dell'informazione



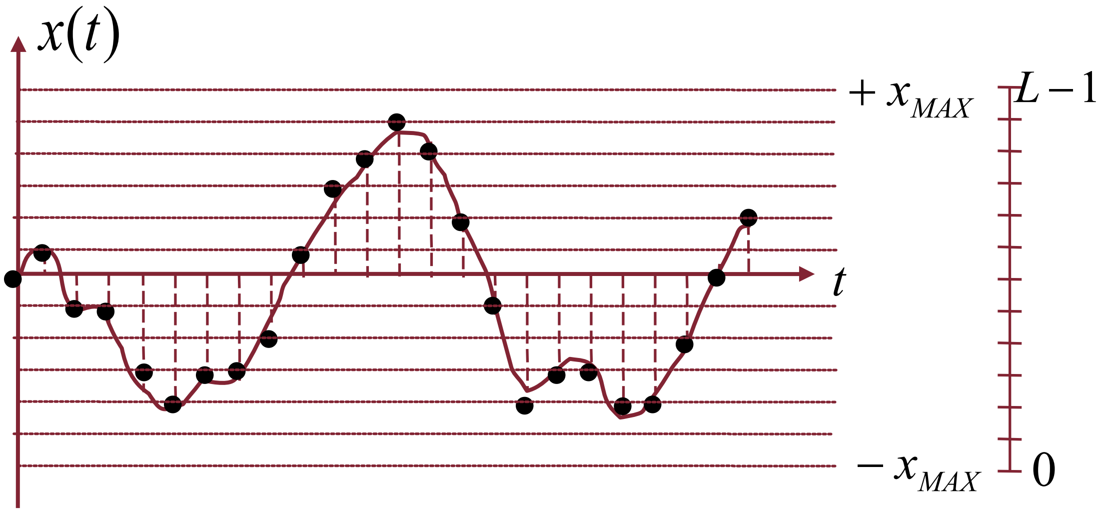


DAC: Digital-to-Analog Converter

Quantizzazione dell'informazione



Quantizzazione dell'informazione



L intervalli di quantizzazione,
L valori ("*livelli*") di quantizz.

$$x_q^{(0)},\dots,x_q^{(L-1)}$$

- b bit per campione $\rightarrow L = 2^b$ intervalli di quantizzazione
- ampiezza intervallo: $\Delta = 2x_{MAX} / L = (2x_{MAX})2^{-b}$
- l'i-esimo livello quantizzazione $x_q^{(i)}$ è posto al centro dell'i-esimo

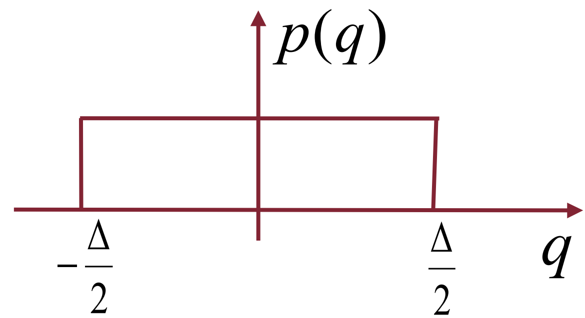
intervallo di quantizzazione.

Quantizzazione dell'informazione

$$\hat{x} \quad = \quad x \quad + \quad q$$

campione quantizzato — *campione originale* — *errore di quantizzazione*

- L'errore di quantizzazione può assumere tutti i valori da $-\Delta/2$ a $\Delta/2$
- Modello probabilistico: *q* è una *variabile aleatoria* con "distribuzione" (densità di probabilità) *uniforme* tra $-\Delta/2$ e $\Delta/2$, e a media nulla



✓ Il valore massimo del modulo dell'errore q è: $\frac{\Delta}{2} = \frac{(2x_{MAX})}{2} 2^{-b}$, e va a zero al crescere di *b*

✓ Sul segnale ricostruito l'errore di quantizzazione viene percepito come un disturbo (*rumore*) sommato al segnale originale

Quantizzazione dell'informazione

$$\hat{x} = x + q$$

- Supponiamo che x possa assumere solo valori in [$-x_{max}$, x_{max}]
- Supponiamo che l'intervallo [$-x_{max}$, x_{max}] sia suddiviso in $L=2^b$ intervalli di quantizzazione di estensione $\Delta = 2x_{\max} / L = 2x_{\max} / 2^b$

$$\Downarrow$$

Si può dimostrare che il valore medio $E\{q^2\}$ del quadrato dell'errore di quantizzazione q vale

$$\mathrm{E}\{\mathrm{q}^2\} = \frac{\Delta^2}{12} = \frac{\left(x_{\max}\right)^2}{3} 2^{-2b}$$

Quindi $E\{q^2\}$ va a zero in maniera esponenziale al crescere di 2b

Trasformate di Fourier

$$\{\, x_n, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, .. \}$$

- può essere *quantizzata* oppure no
- può essere la sequenza dei campioni $x_n = x(t)\big|_{t=nT_c} = x(nT_c)$ di un segnale analogico $x(t)$ oppure può nascere proprio come sequenza (esempi: indicatori economici, distribuzione di temperatura)

- Sequenza numerica di *durata finita* (N elementi):

$$\{\, x_n, \qquad n = 0,\ 1,\ \ldots,\ N-1 \} \longrightarrow x_0,\, x_1,\, \ldots,\, x_{N-1}$$

Trasformate di Fourier

Def: Un segnale x(t) è impulsivo se $\int_{-\infty}^{+\infty} \left| x(t) \right| dt < +\infty$

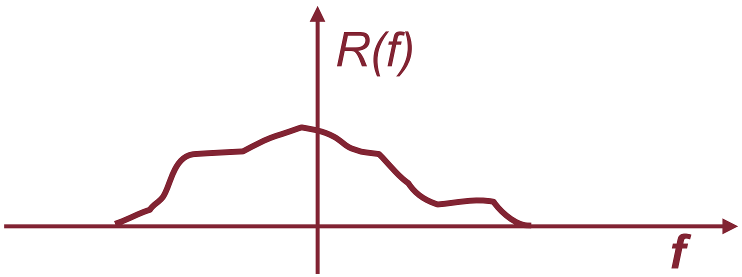
$$\begin{cases} FT: \quad X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt = FT\{x(t)\}, \quad -\infty < f < +\infty \\ FT^{-1}: \quad x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df = FT^{-1}\{X(f)\}, \quad -\infty < t < +\infty \end{cases}$$

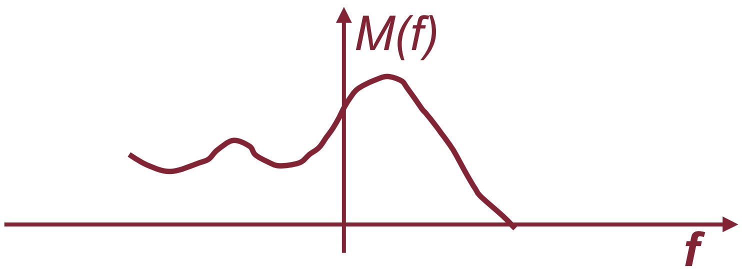
X(f) è una *rappresentazione* di *x(t)* nel dominio della *frequenza* (dominio "spettrale") anziché del tempo

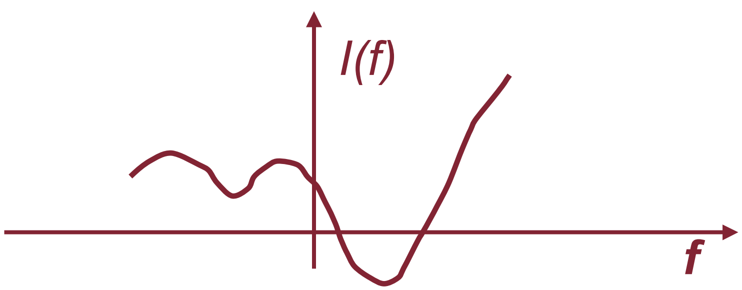
Trasformate di Fourier

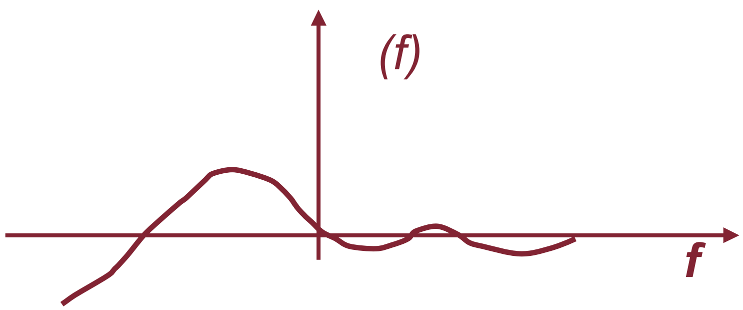
$X(f) = R(f) + j\ I(f) = M(f)e^{\ j}$

$$x(t) = \int_f M(f)e^{j(2\pi ft+\varphi(f))}df$$









Trasformate di Fourier

$x(t)$ *segnale reale:*

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\cos(2\pi ft)dt - j\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\sin(2\pi ft)dt$$

Simmetria coniugata:

$$R(f) = R(-f) \qquad I(f) = -I(-f)$$

$$M(f) = M(-f) \qquad \varphi(f) = -\varphi(-f)$$

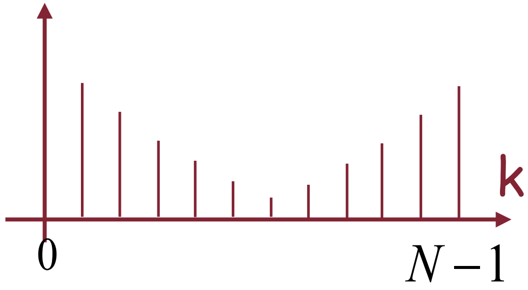
$$X(f) = X^{*}(-f)$$

Trasformate di Fourier

- DFT: Discrete Fourier Transform

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-j2\pi \frac{n}{N}k} \longrightarrow \left\{ X_0, X_1, \ldots, X_{N-1} \right\}$$

$$k = 0, 1, \ldots., N-1$$



Trasformate di Fourier

- La DFT $\{X_k, k=0,\ldots,N-1\}$ costituisce una rappresentazione di $\{x_n\}$ nel dominio *k* delle *frequenze discrete.* Infatti vale la seguente formula di ricostruzione

$$\mathrm{DFT}^{-1} \longrightarrow \qquad x_n = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{+j2\pi\frac{k}{N}n} \qquad n = 0,\ \ldots,\ N-1$$

Filtraggio digitale

La convoluzione discreta è data dalla seguente relazione

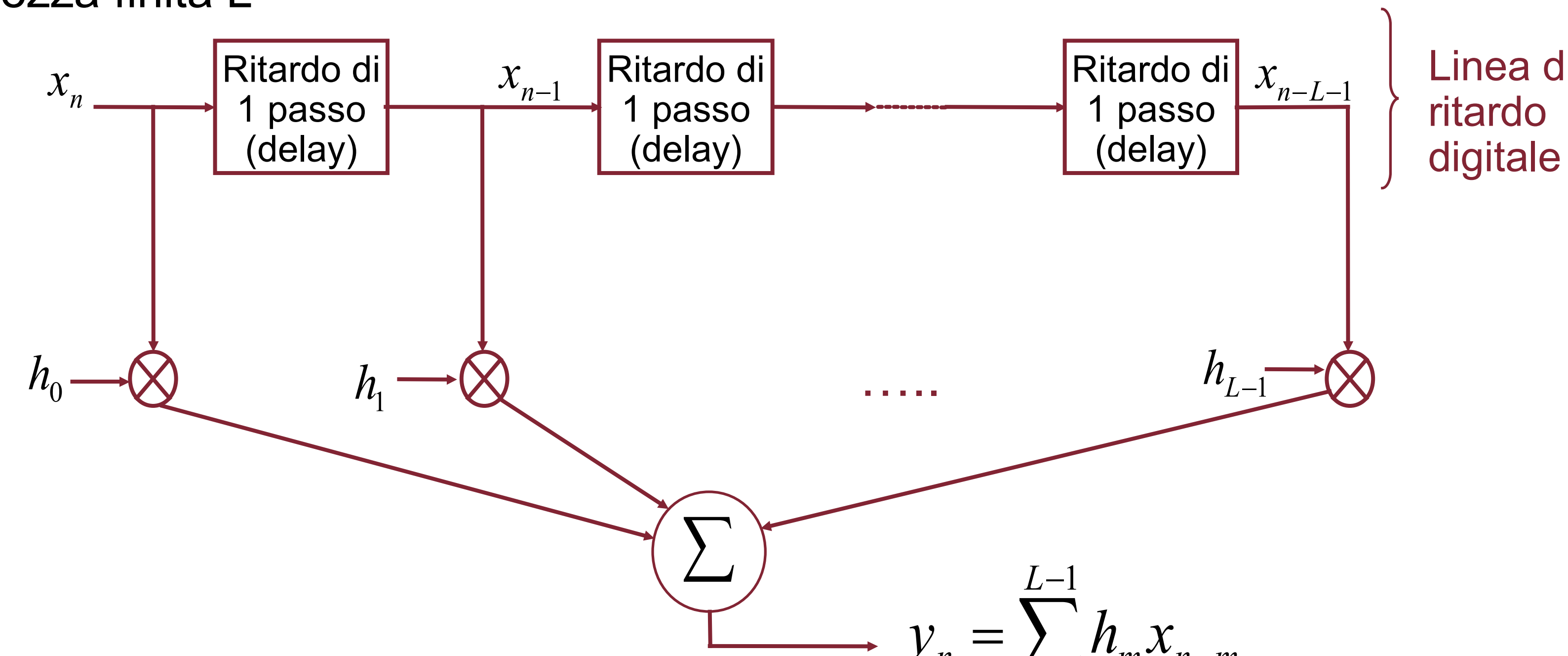
$$y_n = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x_m h_{n-m}, \, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

si può procedere al calcolo o passare per il dominio della frequenza (discreta)

Teorema della convoluzione.
Yk=HkXk

Filtraggio digitale

- Def: un filtro numerico è detto FIR se la sua risposta impulsiva $\{h_n, n=0,\ldots,L-1\}$ ha lunghezza finita L



$$y_n = \sum_{m=0}^{L-1} h_m x_{n-m}$$

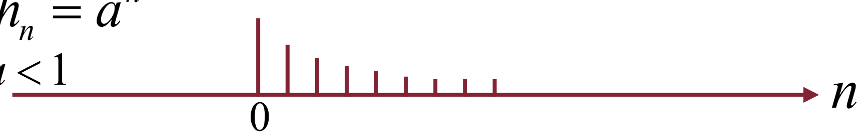
- L'uscita y_n all' "istante" n è pari alla combinazione lineare di L valori di ingresso $x_n, \ldots, x_{n-L-1}$ immagazzinati nella linea di ritardo digitale

Filtraggio digitale

- Un filtro è detto IIR (Infinite Impulse Response) se la sua risposta impulsiva $\{h_n\}$ è non nulla in un numero infinito di istanti.

$$y_n = \sum_{m=0}^{+\infty} h_m x_{m-n} = \sum_{m=-\infty}^{n} x_m h_{n-m}$$

$$h_n = a^n$$
$$a < 1$$



Conclusione
Che cosa fare in laboratorio?

- Matlab…..->…Matlab….->Matlab

- Filtraggio passa basso e passa alto di un segnale
- Filtraggio notch e ‘isolatore’

- Effetto dell’echo (multipath!)