Trasformata di Fourier

Sotto opportune condizioni di continuità ed integrabilità, data una funzione f: **R** → **C**, esiste la funzione (detta *trasformata di Fourier* di f) F: **R** → **C**

$$F(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-2i\pi ux} dx$$

Per nostra grande fortuna, f si può recuperare da F mediante

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(u) e^{2i\pi ux} dx$$

In pratica, dunque, la trasformata di Fourier riorganizza gli stessi dati in un altro spazio, quello delle frequenze.

Trasformata di Fourier

Si noti che, in generale, anche per una f a valori reali (come nel caso di un'immagine) la trasformata ha valori F(u) complessi, quindi esprimibili con un modulo (o ampiezza) e una fase:

$$F(u) = |F(u)|e^{i\theta(u)}$$

In pratica, la funzione f viene vista come sovrapposizione di (in generale infinite) funzioni seno e coseno di $(2\pi u)$, moltiplicate per $|F(u)|$ e traslate di $\theta(u)$.

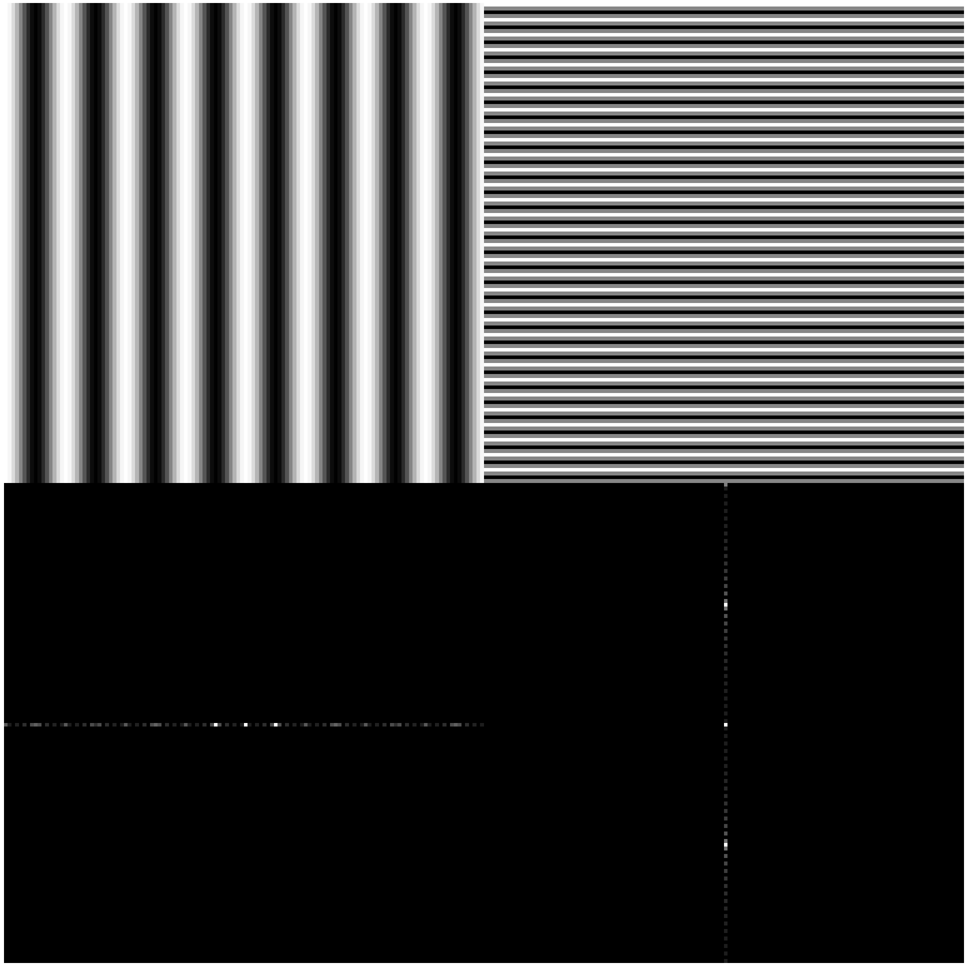
Trasformata di Fourier

Il valore (complesso) F(u) rappresenta il contributo della frequenza u su tutto il segnale. Il termine “alta” frequenza si riferisce ad alti valori di |u|.

Nelle rappresentazioni grafiche della trasformata di Fourier di f normalmente si indica la funzione ampiezza di F(u), detta *spettro di Fourier* di f.

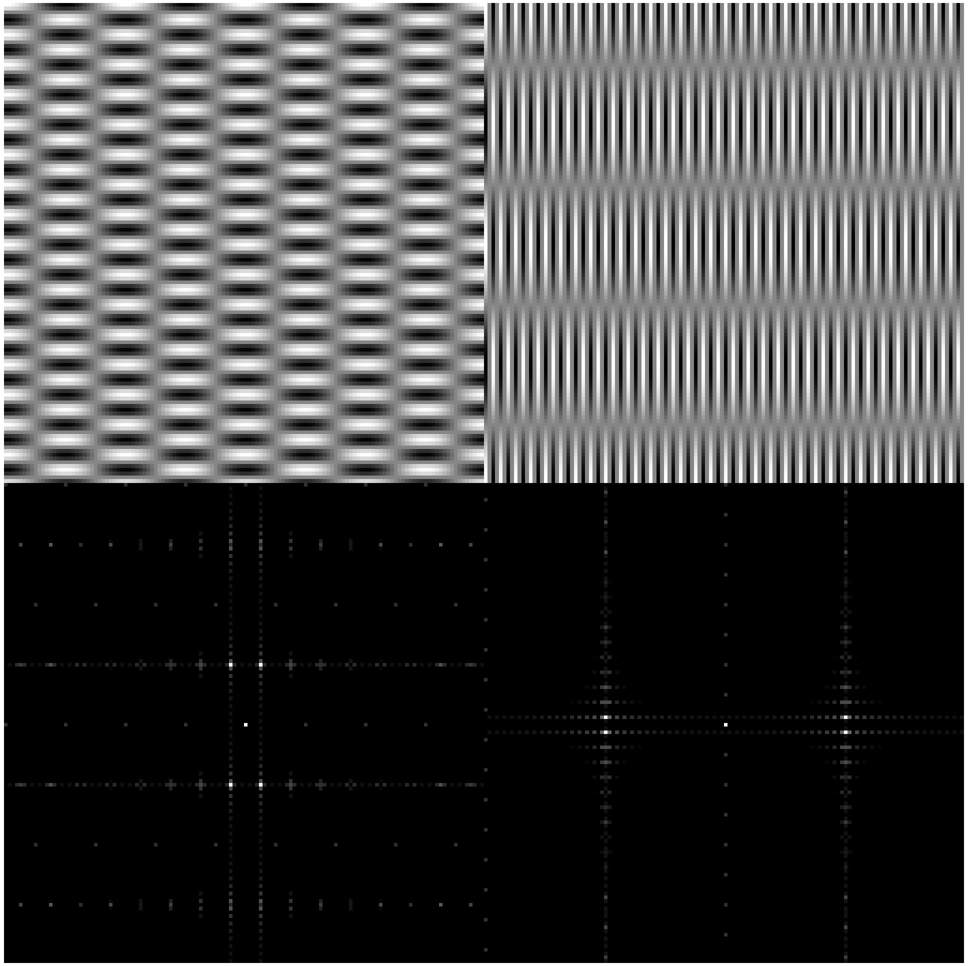
La trasformata di un segnale bidimensionale (per esempio un’immagine) può essere effettuata in due stadi, prima rispetto ad una coordinata, poi rispetto all’altra.

Trasformata di Fourier



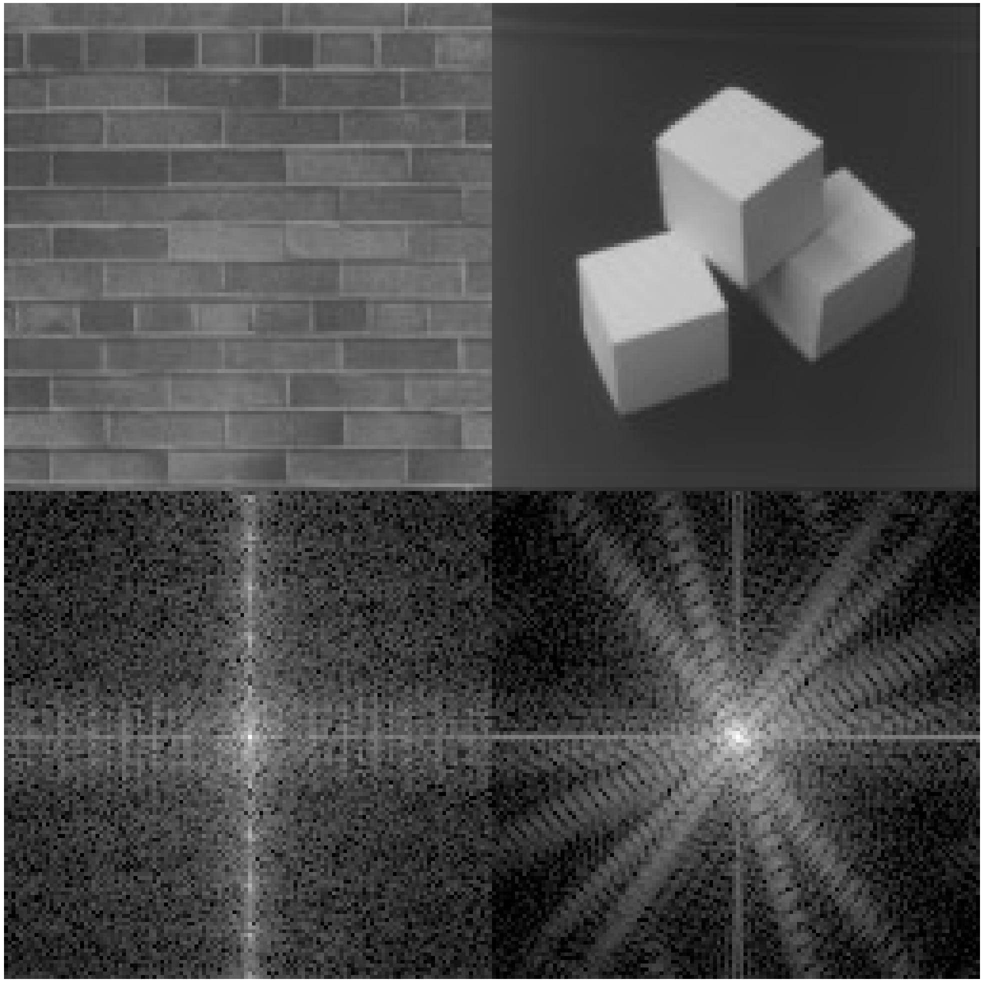
Funzioni periodiche (in alto) e loro trasformate di Fourier.

Trasformata di Fourier



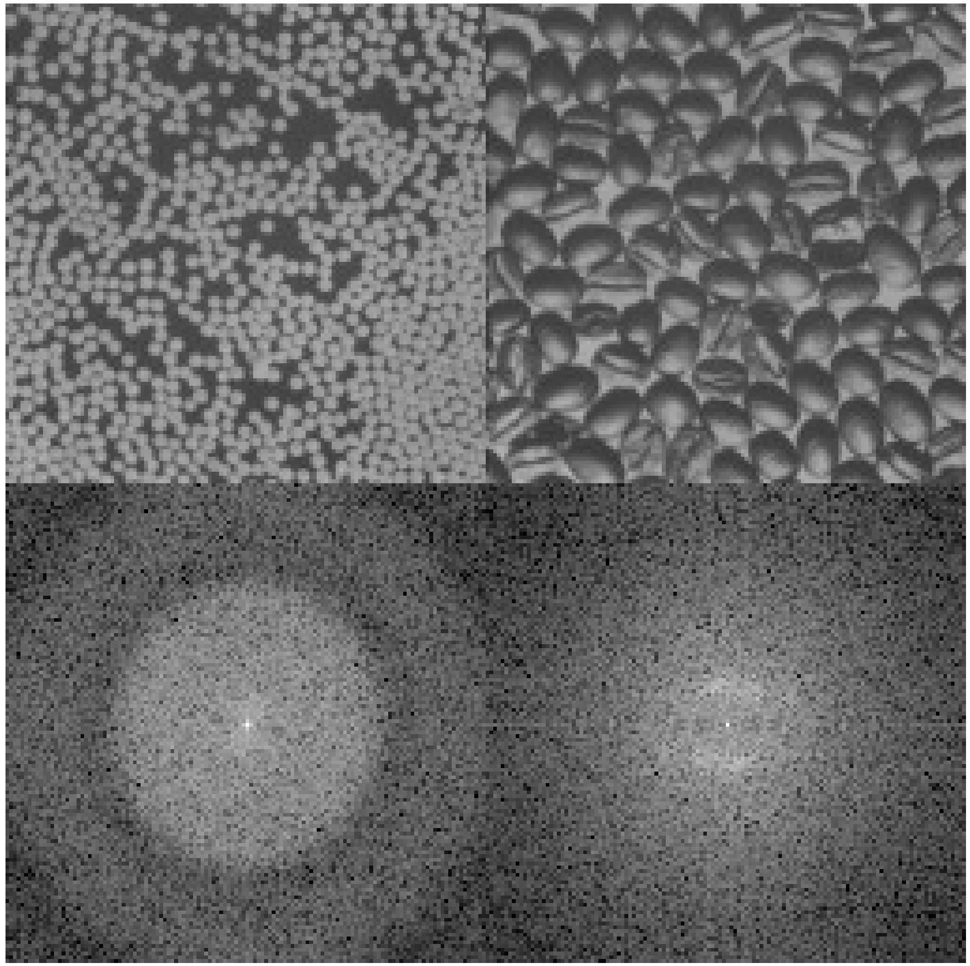
Funzioni periodiche (in alto) e loro trasformate di Fourier.

Trasformata di Fourier



Immagini reali (in alto) e loro trasformate di Fourier.

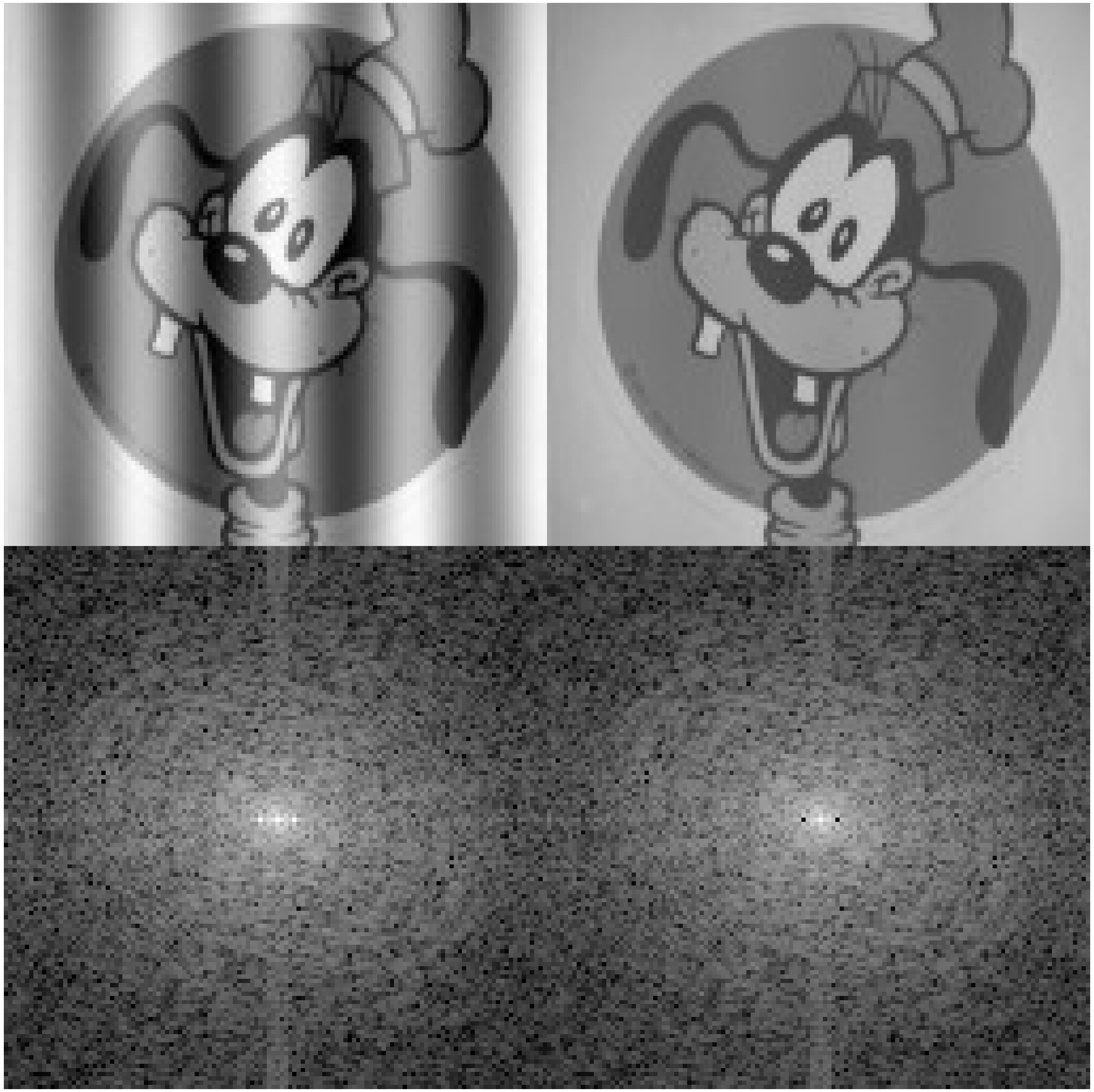
Trasformata di Fourier



La trasformata di Fourier evidenzia l’eventuale omogeneità delle forme presenti

Che vantaggio si può ottenere dalla trasformata di Fourier? Nello spazio delle frequenze è possibile sopprimere frequenze indesiderate, o ridurre lo spazio occupato dai dati pur limitando la degenerazione del segnale, oppure rigenerare segnali degradati da una convoluzione (grazie alle benvenute coimplicazioni $h=f\otimes g \Leftrightarrow H=FG$, $h=fg \Leftrightarrow H=F\otimes G$).

Trasformata di Fourier

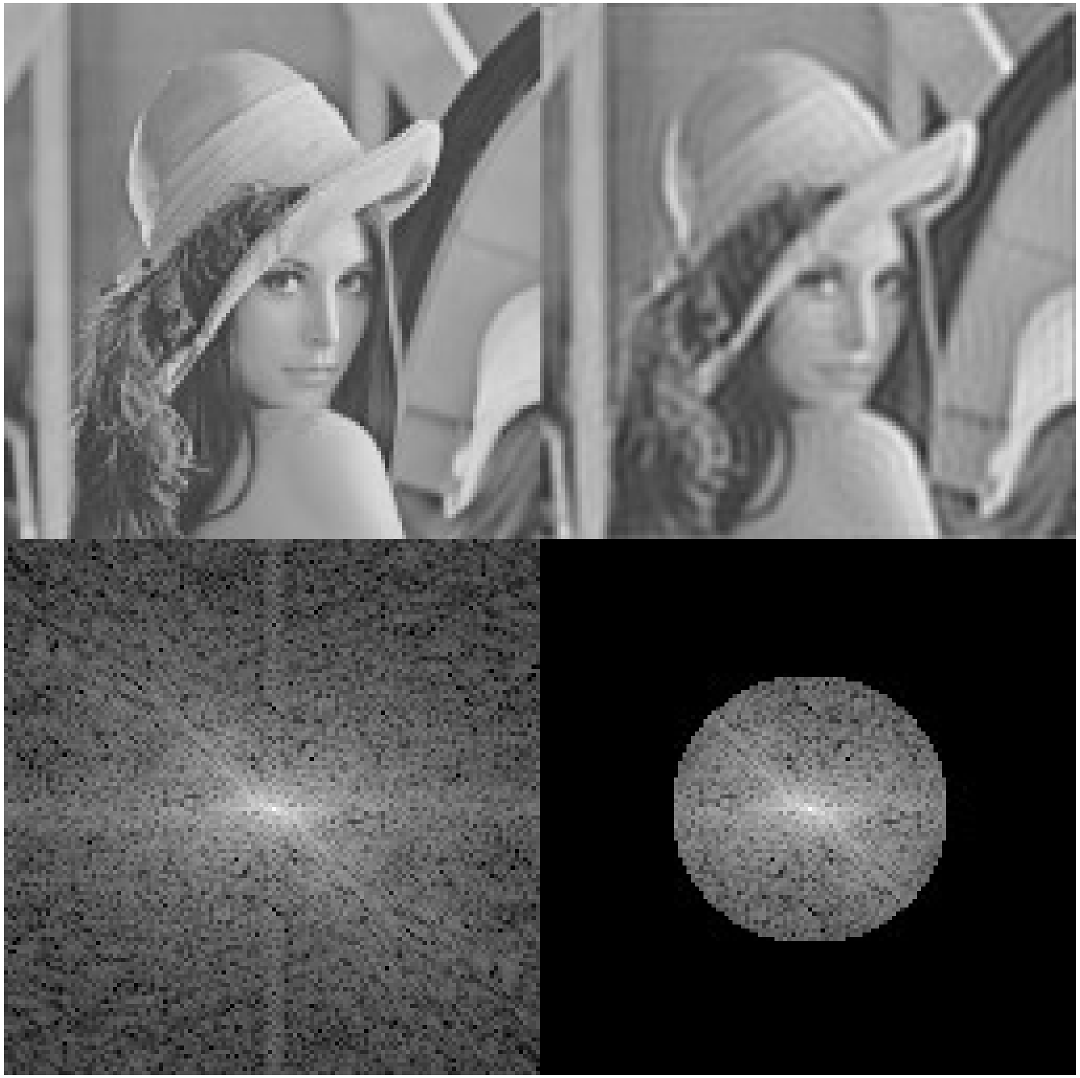


Eliminazione di frequenze indesiderate.

Trasformata di Fourier

Restauro di immagini sfocate.

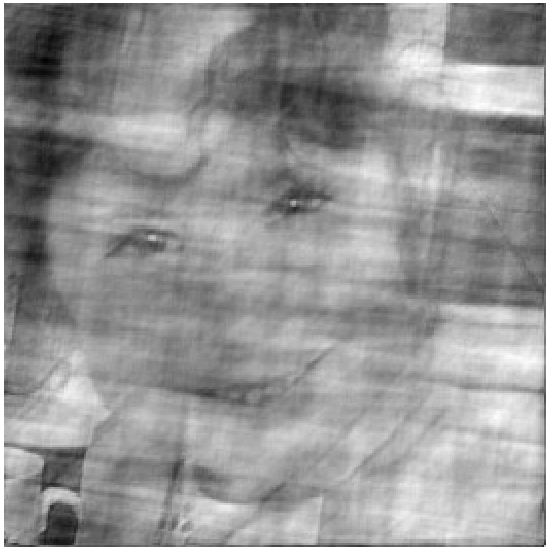
Trasformata di Fourier



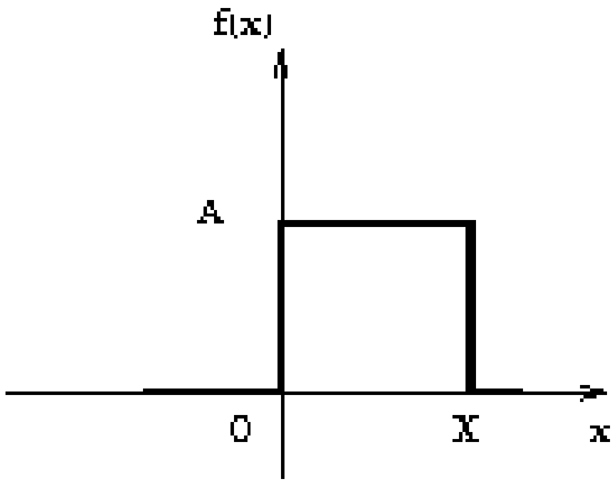
Compressione di immagini.

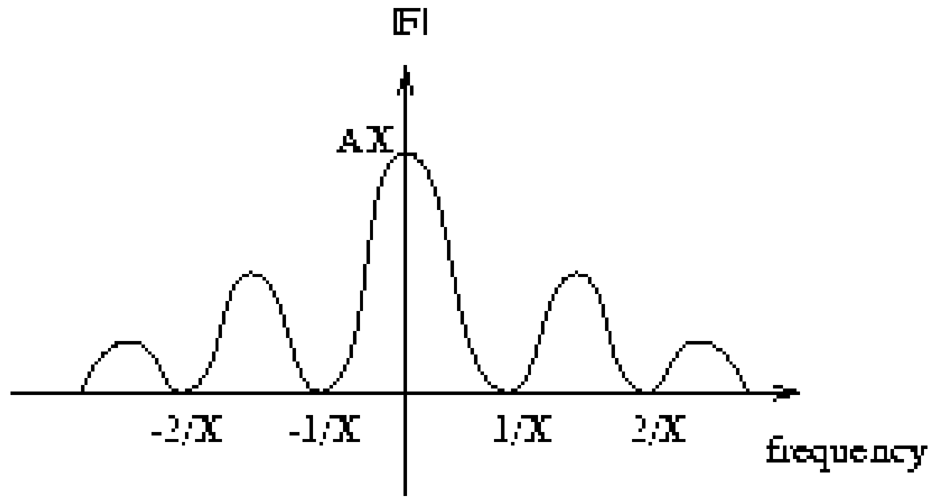
Attenzione: la fase è tutt'altro che ininfluente. Si può vedere da questo esempio: la terza immagine è stata costruita utilizzando la funzione ampiezza della prima e la funzione fase della seconda!



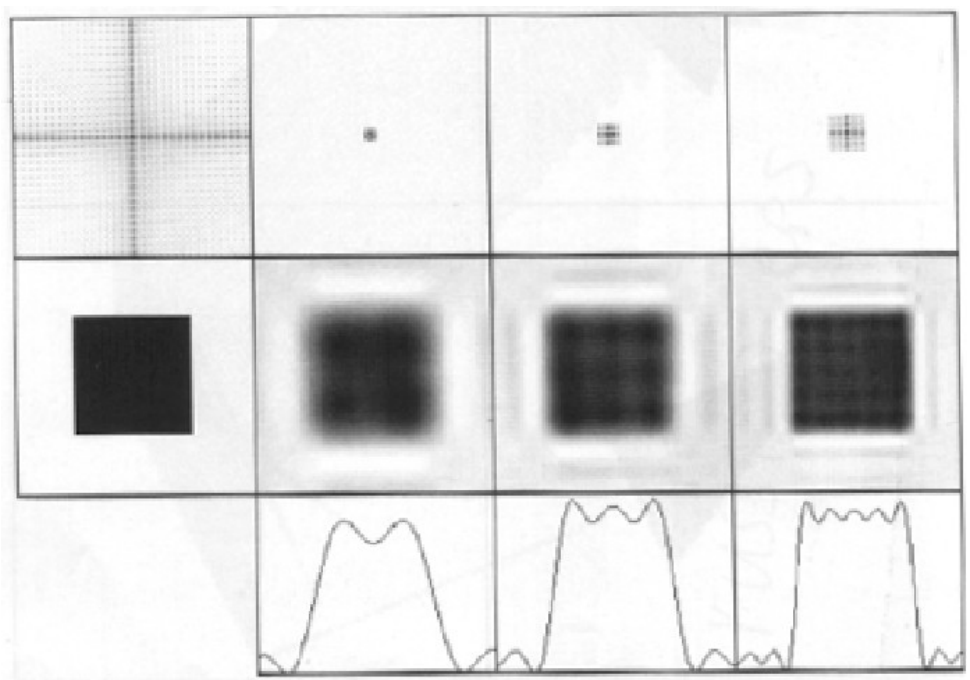


Critica: le semplici funzioni "a gradino" hanno complicate trasformate di Fourier:





Il degrado conseguente all'eliminazione delle alte frequenze è molto notevole su tali funzioni:



Contromisura: sviluppare su un diverso insieme di funzioni (per esempio le *wavelet*).

Tornando alla trasformata di Fourier di f: **R → C**, come se ne realizza una versione discreta? Risposta: dati N campioni equispaziati (per semplicità x=0,...,N-1), un'approssimazione della trasformata di Fourier di f è

$$F(u) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} f(x) e^{-2i\pi ux/N}$$

Dato un opportuno campionamento di F, si ottiene un'approssimazione di f da

$$f(x) = \sum_{u=0}^{N-1} F(u) e^{2i\pi ux/N}$$

Descrittori di Fourier

Un'applicazione interessante è data da un primo metodo per filtrare o sintetizzare la forma di un contorno (una curva di Jordan) C.

C sia campionata regolarmente in una N-pla di punti del piano $((x_0, y_0),\ldots,(x_{N-1}, y_{N-1}))$; i punti possono essere espressi come numeri complessi $s_k=x_k+iy_k$.

Applichiamo ora la trasformata di Fourier discreta:

$$a(u) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} s(k)e^{-2i\pi uk/N}$$

I numeri a(u) si chiamano *descrittori di Fourier* della curva C (o, meglio, della poligonale che l'approssima).

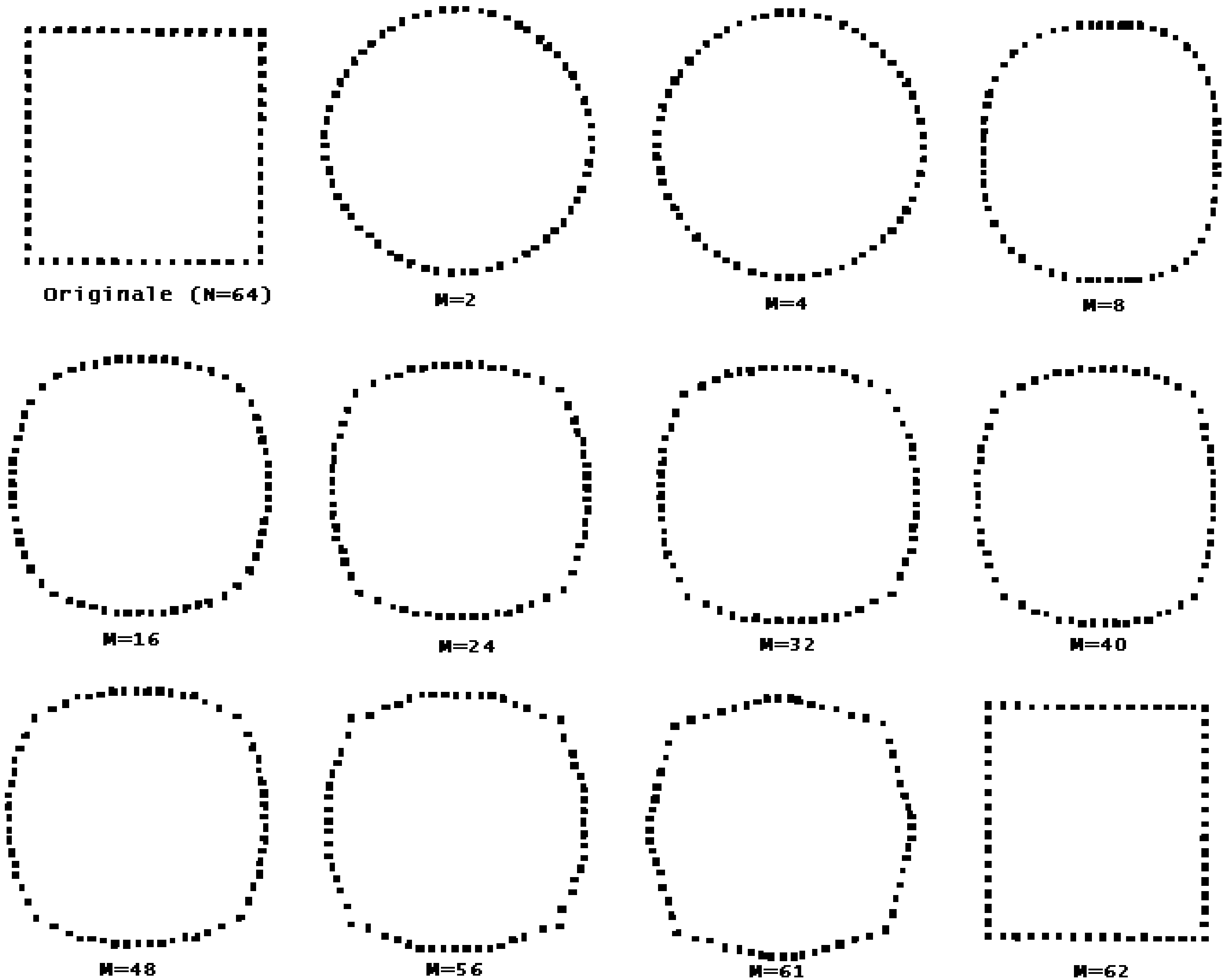
I punti originari si recuperano, naturalmente, così:

$$s(k) = \sum_{u=0}^{N-1} a(u) e^{2i\pi uk/N}$$

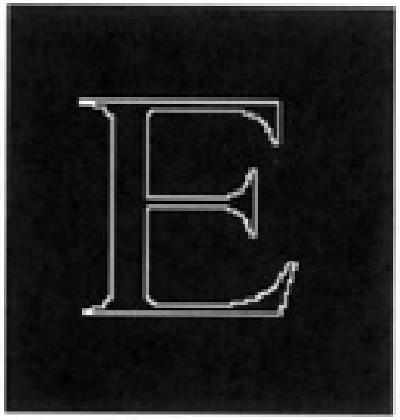
Tuttavia, se si utilizzano solo alcuni descrittori (quelli relativi alle frequenze più basse) si ottiene una curva C' più smussata della C originaria ma abbastanza "somigliante" ad essa.

$$\hat{s}(k) = \sum_{u=0}^{M-1} a(u) e^{2i\pi uk/N}$$

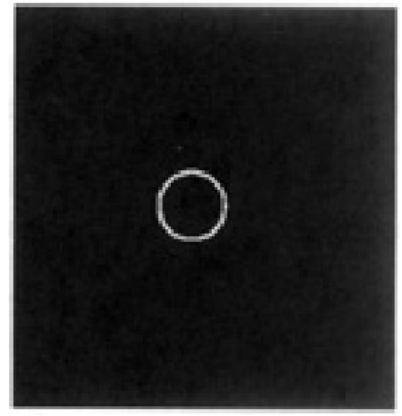
Descrittori di Fourier



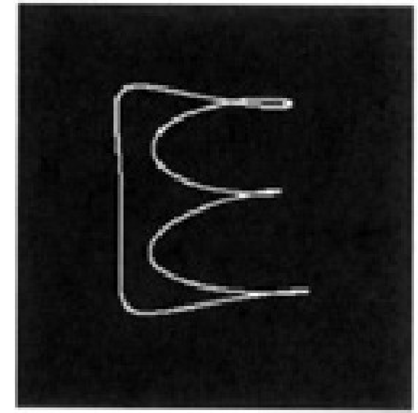
Descrittori di Fourier



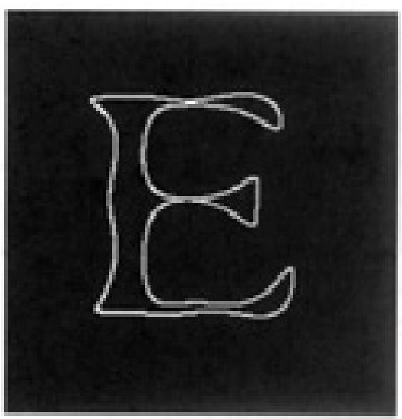
N=1024



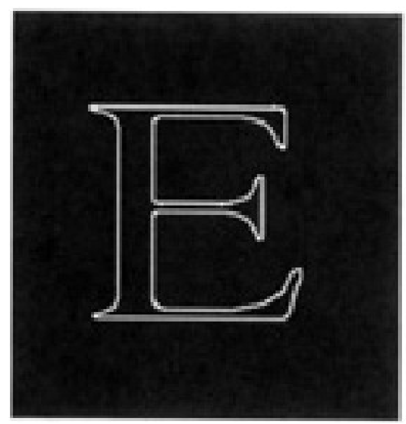
M=3



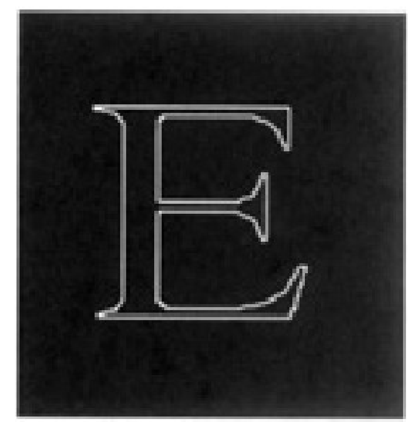
M=21



M=61



M=201



M=401

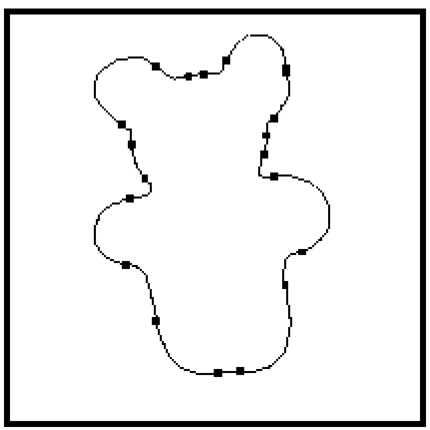
Spazio scalare di curvatura

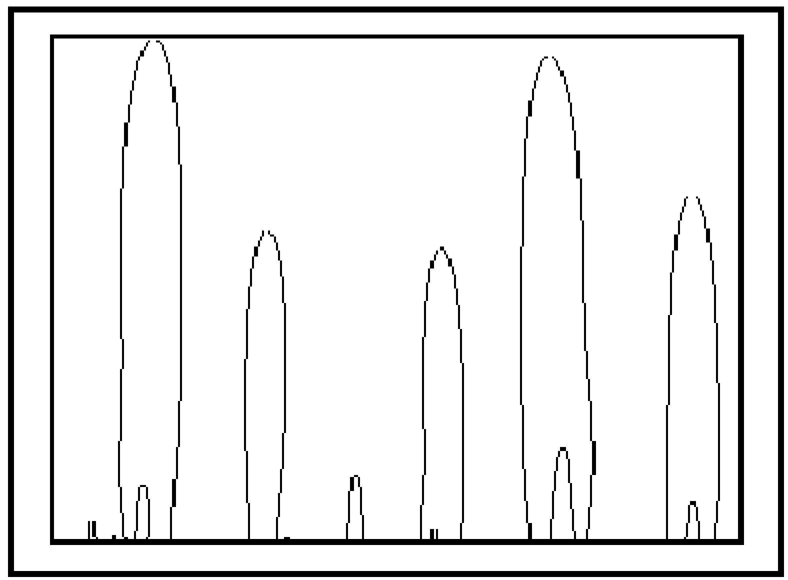
Lo spazio scalare di curvatura (Curvature Scale Space, CSS) di una curva di Jordan C è un'applicazione da $[0,1]\times[0,1]$ a $\{0,1\}$ che registra l'evoluzione dell'insieme dei punti di flesso di C mentre C stessa viene deformata in una curva ad interno convesso.

La curva C è il primo elemento di una famiglia F di curve ottenute da C smussandola con gaussiane di ampiezza progressiva. I tempi di evoluzione di F sono indicati in ordinata. Ogni fissata ordinata β del CSS corrisponde ad un istante dell'evoluzione, cioè ad una curva C_β della famiglia.

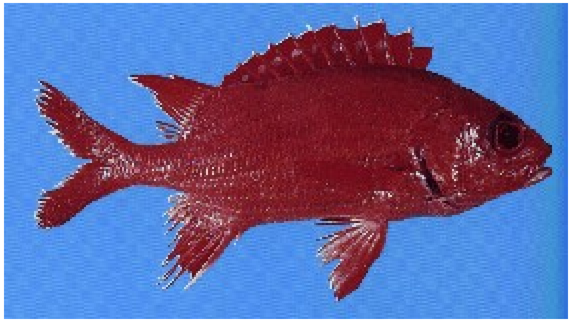
Spazio scalare di curvatura

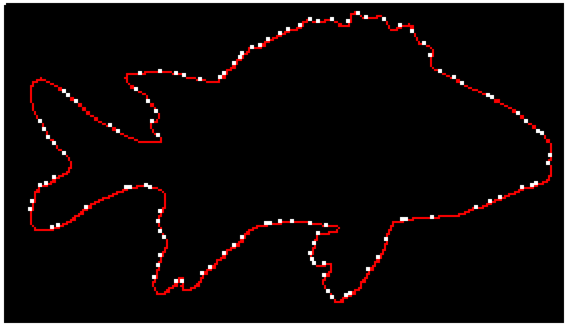
Il CSS vale 1 in un punto (α,β) del dominio $[0,1]\times[0,1]$ se e solo se nella curva C_β il punto di ascissa α è di flesso. (Si tratta dell'ascissa curvilinea, a partire da un punto fissato, sulla curva C originaria).

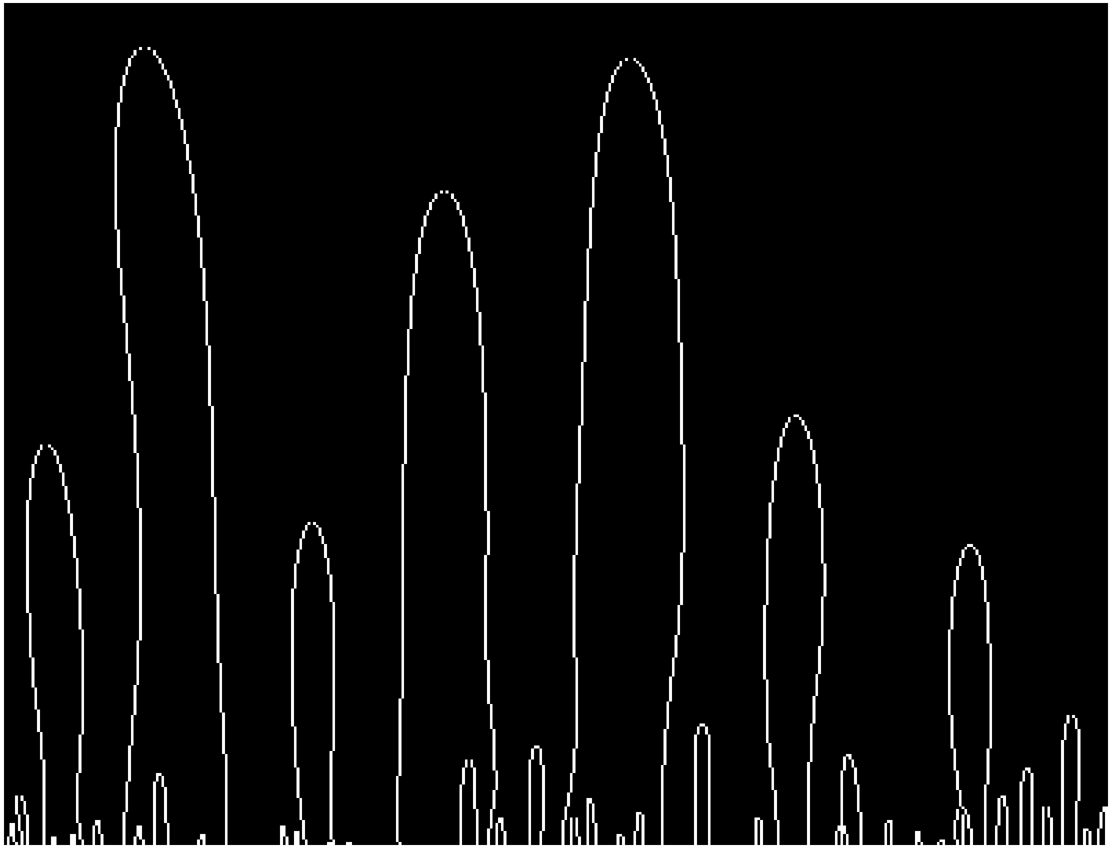




Spazio scalare di curvatura





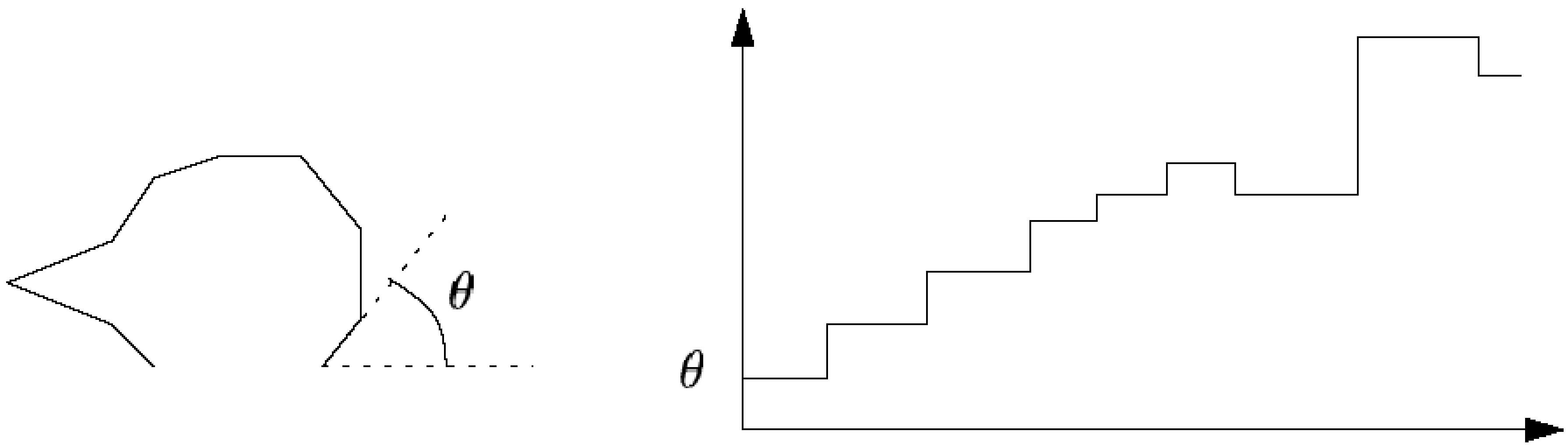


Turning function

La *funzione angolare cumulativa*, o *turning function*, di una poligonale orientata A è una funzione Θ_A:[0.L]$\rightarrow\mathbf{R}$ (L è la lunghezza di A) che associa al punto di A di ascissa curvilinea s l'angolo $\Theta_A(s)$ fra la tangente nel punto e l'asse delle x, entrambe orientate positivamente.

Questa funzione non varia per traslazioni, subisce una traslazione verticale se A viene ruotata, viene contratta o dilatata orizzontalmente se A è sottoposta ad un'omotetia.

Turning function



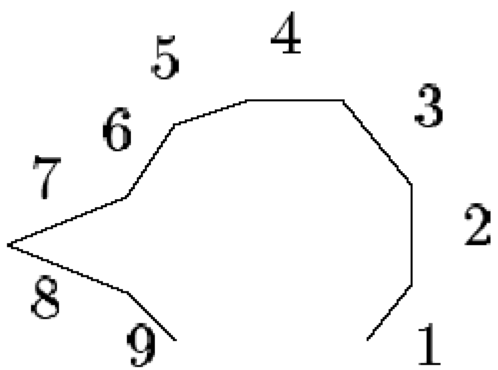
Una poligonale e la sua turning function.

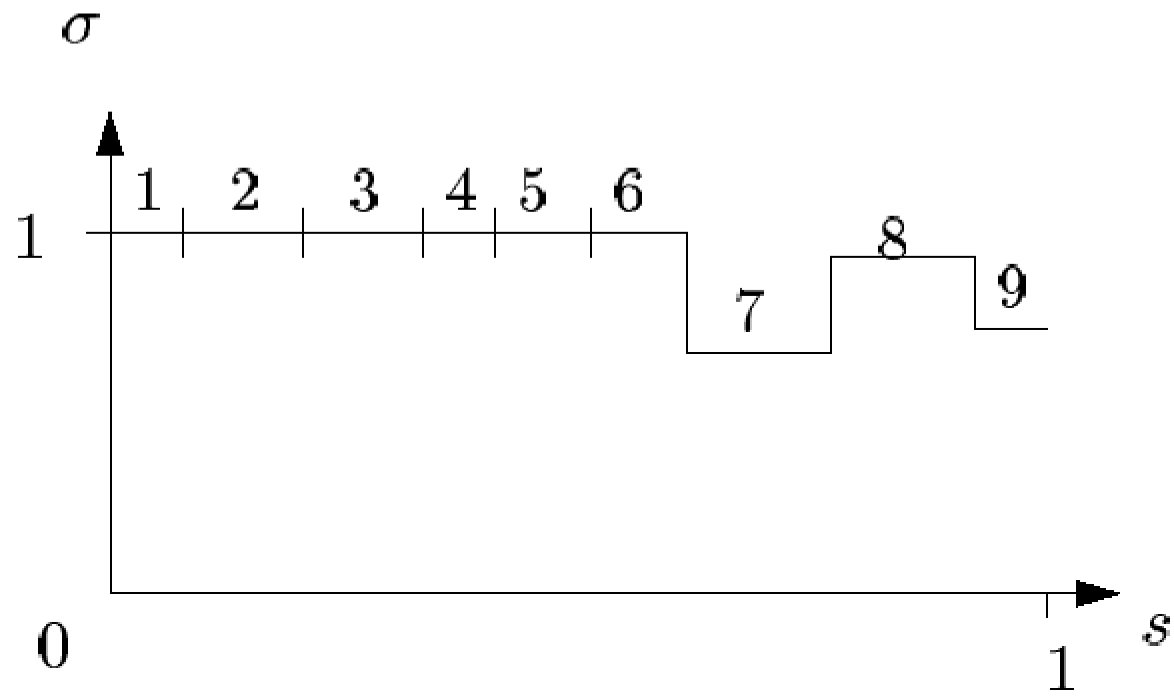
Signature function

La *funzione sigla*, o *signature function*, di una poligonale orientata A, la cui lunghezza è normalizzata ad 1, è una funzione σ_A:[0.1]$\rightarrow$**R** che associa al punto di A di ascissa curvilinea s la lunghezza $\sigma_A(s)$ della porzione di A compresa nel semipiano sinistro chiuso di origine la tangente orientata nel punto..

Questa funzione è invariante per similitudini, ed ovviamente è poco informativa sulla forma della curva (per esempio è costante per ogni bordo di poligono convesso).

Signature function





Una poligonale e la sua signature function.